8 november 2010

Calculus 1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
10	10	10	14	10	7	6	10	8	8,5

$$\frac{3 \cdot 8,5 + 9\frac{3}{4} + 9}{5} = 8,85$$

9

$H = 9\,3/4$
$M = 9$

aantal gebruikte blaadjes: 10.

8 november 2010

Calculus 1

1A Formuleer het principe van volledige inductie:

Volledige inductie werkt in drie stappen de inductiebasis, de inductiehypothese en de inductiestap.

5 Inductiebasis: Hierin toon je aan dat je stelling geld voor ~~n~~ ~~(k∈N)~~. ~~Meestal~~ een gepaald getal meestal voor $n=1$. ~~met k∈~~

Inductiehypothese: Hierin neem je aan dat het klopt voor $n=k$ met $(k \in \mathbb{N})$.

Inductiestap: Hierin bewijs je dat het klopt voor $n=k+1$. Want als je bewezen hebt dat het klopt voor $n=k+1$ betekent het dat als je 1 beginwaarde hebt en als $n=k+1$ dat het klopt voor alle n meer dan de beginwaarde. De beginwaarde is dus de waarde die je hebt gekozen voor de inductiebasis. Bij het bewijs van $n=k+1$, ga je terug naar de Inductiehypothese, omdat je hier ~~weet~~ dat hebt aangenomen dat het klopt.

B Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Bewijzen m.b.v. volledige inductie:

Inductiestap: aantonen dat het klopt voor $n = 1$:

1 $\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 +} \cdots + 1(1+1)(1+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$

6 $\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3}$ $6 = 6$

dus dat klopt.!

Inductiehypothese: neem aan dat het klopt voor $n = k$:

1 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

Inductiestap: Bewijzen dat $n = k+1$

Dus dat

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

We weten dat $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

3

Dus $\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

$k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

$(4+k)(k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

Dus we hebben het bewezen □

2

We nemen aan dat $f(x)$ differentieerbaar is voor $-\infty < x < \infty$. Vul de volgende defenitie aan
De afgeleide f' is continu in een punt a indien ...

2

De afgeleide f' is continu in een punt a indien $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$

(En $f(x)$ moet diffb zijn, maar dat was gegeven)

c We noemen een functie f continu diffb. op $(-\infty, \infty)$, indien $f(x)$ diffb. voor alle $x \in (-\infty, \infty)$ en de afgeleide $f'(x)$ continu is voor alle $x \in (-\infty, \infty)$

5

Neem aan dat f en g continu diffb. zijn op $(-\infty, \infty)$, $g'(a) \neq 0$ en $f(a) = g(a) = 0$. Toon aan dat (de regel van l'Hospital) juist is):

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Want, zie aannames.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f'(x)}{\lim_{x \to a} g'(x)}$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

f en g continu diffb. op $(-\infty, \infty)$
Dus $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$
En $\lim_{x \to a} g'(x) = g'(a)$

D Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ en $\lim_{x \to \infty} (x e^{1/x} - x)$

Eerst $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$:

Expliciet waarom

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

4

Nu $\lim_{x \to \infty} (x e^{1/x} - x)$

$$\lim_{x \to \infty} (x e^{1/x} - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} \cdot -x^{-2}}{-x^{-2}}$$

4

2 Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $2z^4 + 2z^2 + 1 = 0$
en schets de ligging van deze getallen in het complexe vlak.

Stel $A = z^2$

Dan $2A^2 + 2A + 1 = 0$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

ABC- formule

3p

Dus Voor A geldt : $A = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i$

$A = z^2$

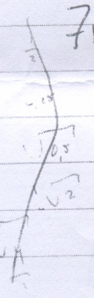
Dus $z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \quad \vee \quad z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

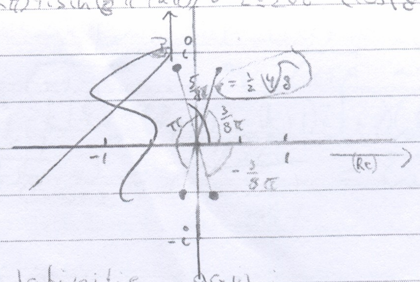
$$z^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)\right) \vee z^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\left(1\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi\right) + i\sin\left(1\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi\right)\right)$$

7p.

$$z = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}\left(\cos\left(\tfrac{3}{8}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{8}\pi + k\pi\right)\right) \vee z = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}\left(\cos\left(\tfrac{5}{8}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{8}\pi + k\pi\right)\right)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\tfrac{3}{8}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{8}\pi + k\pi\right)\right) \vee z = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\tfrac{5}{8}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{8}\pi + k\pi\right)\right)$$





3.A Vul de volgende definitie aan:
De afgeleide van een functie f in punt a wordt gegeven door $f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \ldots$

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3

waarbij $f(a)$ continu is op $[a+h, a]$
$f(a)$ differb is op $(a+h, a)$
en dat $f(a)$ ~~tussen~~ binnen de grenzen van $a+h$ en a zit.

3

Dus aantonen dat geldt $\lim_{r \to R} GMr/R^3 = \lim_{r \to R} GM/r^2 \Rightarrow$

dus dat $\lim_{r \to R} G \lim_{r \to R} M \cdot \lim_{r \to R} \frac{r}{R^3} = \lim_{r \to R} G \lim_{r \to R} M \cdot \lim_{r \to R} \frac{1}{r^2} \Rightarrow$

$G \cdot M \cdot \frac{\lim_{r \to R} r}{\lim_{r \to R} R^3} = G \cdot M \cdot \frac{1}{\lim_{r \to R} r^2} \Rightarrow$

5.

$G \cdot M \cdot \frac{1}{R^2} = G \cdot M \cdot \frac{1}{R^2}$ (waarbij R gevonden is door $\lim_{r \to R}$)

En dit klopt dus
F (r) is overal continu

B Is F differentieerbaar in $r = R$
Een functie is differentieerbaar in ~~een punt als de functie daar continu is~~ ~~en als de~~ op dat punt en als de functie te differentieren is. We hebben bij vraag A al gezien dat de functie continu is

2. in $r = R$ Nu nog kijken of de functie te differentieren valt in $r = R$
dus de functie $F(r) = GM/r^2$
En dat wordt $F'(r) = -2GM/r^3$
Dus F valt ook te differentieren in $r = R$

en de andere functie dan?

2^{-1} $-x^{-2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} \cdot -x^{-2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^{\left(\lim_{x\to\infty}(1/x)\right)} =$$

4 A De functie $f(x)$ is gedefenieerd voor $-\infty < x < \infty$. Geef de $\epsilon-\delta-$defenitie van $\lim_{x\to a} f(x) = L$:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ waarvoor geldt:
Als $|x-a| < \delta$ dan $|f(x) - L| < \varepsilon$

5

B Bewijs m.b.v. deze definitie dat $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ waarvoor geldt
Als $|x-2| < \delta$ dan $|x^2 - 4x + 5 - 1| < \varepsilon$
$|(x-2)(x-2)| < \varepsilon$

5

We kiezen $\delta^2 = \varepsilon$
dus $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ en
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ dus doordat we een δ hebben gevonden geldt $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$ $\square$

5 A
$$F(r) = \begin{cases} GMr/R^3 & \text{als } r < R \\ GM/r^2 & \text{als } r \geq R \end{cases}$$

De vraag is of de functie $F(r)$ continu is. De functie bestaat in twee delen, deze delen zijn alletwee continu. We moeten laten zien dat $\lim_{r\to R} GMr/R^3 = \lim_{r\to R} GM/r^2$

Want dan is de functie $F(r)$ overal continu.

5

r^{-2}

r^{-3}

A Bepaal de afgeleide van $f(x) = (1+x^2)^x$

$f(x) = (1+x^2)^x$

$= e^{x\ln(1+x^2)}$

Dus we hebben nu $f(x) = e^{x\ln(1+x^2)}$

We willen weten wat $f'(x)$ is.

~~De~~ Het kenmerk van een e^{iets} functie is dat de afgeleide $e^{iets} \cdot$ (de afgeleide van iets) is.

~~Dus~~ ~~$f'(x)$~~ De afgeleide van $x\ln(1+x^2)$ is $\ln(1+x^2) + \frac{x}{1+x^2} \cdot 2x$

Dus $f'(x) = e^{x\ln|1+x^2|} \cdot \left(\ln|1+x^2| + \frac{2x^2}{1+x^2}\right)$

5. ~~De afgeleide van $(1+x^2)$~~

De ~~afgeil~~ afgeleide van $(1+x^2)^x$ is

$f'(x) = e^{x\ln|1+x^2|} \cdot \left(\ln|1+x^2| + \frac{2x^2}{1+x^2}\right)$

B De functie $g(x)$ is continu voor $x > 0$

1. Verder is gegeven dat $\int_0^{x^2} g(t)\,dt = (1+x^2)^x$

Bereken $g(1)$

x^2 ~ let op!

Om $\int_0^{x^2} g(t)\,dt = (1+x^2)^x$ te krijgen

$G(x^2)' = 2x\,g(x^2)$

$g(t)$ moeten we eerst de functie $g(t)$ krijgen. En de afgeleide van $(1+x^2)^x$ is gelijk aan $g(t)$.

Verder weten we dat de afgeleide van $(1+x^2)^x$

$= e^{x\ln|1+x^2|} \cdot \left(\ln|1+x^2| + \frac{2x^2}{1+x^2}\right)$

we moeten $g(1)$ berekenen, dus vul dat in:

$g(1) = e^{\ln|2|} \cdot \left(\ln|2| + \frac{2}{2}\right)$ $\quad x = \pm 1 \quad x \neq -1$

$g(1) = 2 \cdot (\ln(2) + 1)$

dus $g(1) = 2\ln(2) + 2$

7

7 A Bereken $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ ~~partieel~~

$\boxed{\begin{array}{l} \ln(x) = u \\ \frac{1}{x} = du \\ \frac{1}{x^2} = dv \\ -\frac{1}{x} = v \end{array}}$

$\int_1^\infty \ln(x)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = -\ln(x)\frac{1}{x} - \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot -\frac{1}{x}\,dx$

Dus $\int_1^\infty \ln(x)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = -\ln(x)\frac{1}{x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

En $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty$ $\qquad \frac{1}{\infty}$ gaat naar 0

$-\big((0)-(1)\big) = 1$

~~Dus~~

(5)

Nu moeten we nog weten wat $-\left[\ln(x)\frac{1}{x}\right]_1^\infty$ i

Eerst $\lim_{x\to\infty} -\ln(x)\frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-\ln(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1}$

En Als je 1 invult krijg je $0\cdot 1 = 0$

Dus $-\left[\ln(x)\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 0$

Dus $\int_1^\infty \ln(x)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = 1$

8

3 Bepaal $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,dx$ stel $u = \sin(x)$

$du = \cos(x)\,dx$

Dus $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u}}$

En $\int \frac{du}{\sqrt{1+u}} \Rightarrow 2(1+u)^{\frac{1}{2}} + C$ $u = \sin(x)$

5 Dus invullen $2\sqrt{(1+\sin(x))} + C$

Dus $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,dx = 2\sqrt{1+\sin(x)} + C$

c Bereken $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\sin(x)}{1+x^4}\,dx$

Dus $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\sin(x)}{1+x^4}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2}{1+x^4}\cdot\sin(x)\,dx$

Nu: $u = \frac{x^2}{1+x^4}$

$du = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{x^2}{4x^3}$

$du = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{4x}$

$dv = \sin(x)$

$v = -\cos(x)$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2}{1+x^4}\cdot\sin(x)\,dx = \frac{x^2}{1+x^4}\cdot -\cos(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$+\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2x}{1+x^4}\cdot\cos(x)\,dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cancel{\frac{1}{4x}}\cos(x)$

$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{2x}{1+x^4} + x^2\cdot -\frac{1}{(1+x^4)^2}\cdot 4x^3$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2x}{1+x^4}\cos(x) = \frac{2x}{1+x^4}\sin(x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{1+x^4}\sin(x) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cancel{\frac{1}{2x^2}}\sin(x)$

$u = \frac{2x}{1+x^4}$ $du = \frac{2}{1+x^4} - \frac{1}{2x^2}$

$dv = \cos(x)$ $v = \sin(x)$

9

$$\text{Dus} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \sin(x)}{1+x^4}\,dx = \frac{x^2}{1+x^4} \cdot -\cos(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} x \cos(x)\,dx + \frac{2x}{1+x^4} \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2x^2} \sin(x)\,dx$$

5626

Onevenfunctie! $- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{1+x^4} \sin(x)\,dx \Rightarrow$

$$0 - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} x \cos(x)\,dx + \frac{2x}{1+x^4} \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 0 - 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} x \cos(x)\,dx = \frac{1}{4} x \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int \frac{1}{4} \sin(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{8}\pi\right) - (0) + \left(\frac{\pi}{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{-\pi}{1+\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2}\right)$$

$$= 0$$

$$\text{Dus} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \sin(x)}{1+x^4}\,dx = 0$$

8 Bepaal een functie $y(x)$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(x^2+1)\,y' = xy \quad \text{en} \quad y(1) = 1$$

$$\text{Dus } (x^2+1) \frac{dy}{dx} = xy$$

$$(x^2+1)\,dy = xy\,dx$$

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dy = y\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy$$

$$\ln|y| = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + c$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad u = x^2, \quad du = 2x$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}du}{u+1} \Rightarrow 2 \cdot \ln|2u+2| + \tilde{c}$$

$$\text{dus } 2\ln|2x^2+2| + \tilde{c}$$

$$\ln|y| = 2 \cdot \ln|2x^2+2| + \tilde{c}$$

$$y = e^{\left(2 \cdot \ln|2x^2+2| + \tilde{c}\right)}$$

8

$$y = d \cdot e^{2\ln|2x^2+2|} \qquad \text{met } y(1) = 1$$

$$1 = d \cdot e^{2\ln|4|} \qquad \text{dus } d = e^{-2\ln|4|}$$

$$\text{dus } y = \frac{e^{2\ln|2x^2+2|}}{e^{2\ln|4|}} \Rightarrow y = \frac{e^{2\ln|2x^2+2|}}{16}$$

10